Lineaire Algebra I

18 April 2012

university of groningen

Het tentamen bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het begin van de vraagstukken. Het totale aantal punten die u kunt bereiken is 100. U krijgt 6 punten gratis. Each question is also translated into English. You may answer in Dutch or English.

1. (Nederlands) [**2+4+4+4+4 Punten.**]

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

met $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Bestaan er waarden van α waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ strijdig is?

(b) Bepaal alle waarden van α waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ precies 1 oplossing heeft, en bepaal die oplossing.

(c) Bepaal alle waarden van α waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oneindig veel oplossingen heeft, en bepaal de oplossingsverzameling.

Stel $\mathbf{b}$ is de vector gegeven door

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Bepaal alle waarden van α waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ strijdig is.

(e) Bepaal alle waarden van α waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent is, en bepaal de oplossingsverzameling.

1. (English) [**2+4+4+4+4 Points.**]

Let the matrix A be defined as

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

with $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Are there values of α for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is inconsistent?

(b) Determine the values of α for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has exactly one solution, and determine the solution.

(c) Determine the values of α for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has infinitely many solutions, and determine the solution set.

Suppose the vector $\mathbf{b}$ is given by

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Determine all values of α for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is inconsistent.

(e) Determine the values of α for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent, and determine the solution set.

2. (Nederlands) [**4+4+4 Punten.**]

Stel $\mathcal{V}$ een vectorruimte.

(a) Toon aan: $\mathcal{V}$ bevat precies één 0-element, d.w.z precies één element $\mathbf{0}$ met de eigenschap dat voor alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ geldt: $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.

(b) Toon aan dat elke eindige verzameling vectoren in $\mathcal{V}$ die de vector $\mathbf{0}$ bevat lineair afhankelijk is.

(c) Stel $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineair onafhankelijke vectoren in $\mathcal{V}$. Bewijs dat $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1\}$ lineair onafhankelijk zijn.

2. (English) [**4+4+4 Points.**]

Let $\mathcal{V}$ be a vector space.

(a) Show that: $\mathcal{V}$ has exactly one 0-element, i.e. exactly one element $\mathbf{0}$ with the property that for all $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, it holds that $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.

(b) Show that every finite set of vectors in $\mathcal{V}$ which contains the vector $\mathbf{0}$ is linearly dependent.

(c) Let $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ be linearly independent vectors in $\mathcal{V}$. Show that $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1\}$ is linearly independent.

3. (Nederlands) [**4+4+4+4 Punten.**]

Laat $\mathbb{R}^{n\times n}$ de vectorruimte zijn van alle $n \times n$ matrices met reële coefficienten. Een matrix A heet *anti-symmetrisch* indien $A^\top = -A$, en *symmetrisch* als $A^\top = A$. Laat S de deelruimte zijn van $\mathbb{R}^{n\times n}$ van symmetrische matrices. Laat L de deelverzameling zijn van $\mathbb{R}^{n\times n}$ van anti-symmetrische matrices.

(a) Toon aan dat L een deelruimte is van $\mathbb{R}^{n\times n}$.

In de rest van deze opgave, neem aan dat $n = 2$.

(b) Bepaal een basis van L. Wat is de dimensie van L?

(c) Bepaal een basis van S. Wat is de dimensie van S?

(d) Laat zien dat elke matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ kan worden geschreven als $A = A_1 + A_2$, met A_1 anti-symmetrisch en A_2 symmetrisch.

3. (English) [**4+4+4+4 Points.**]

Let $\mathbb{R}^{n\times n}$ be the vector space of all $n \times n$ matrices with real coefficients. A matrix A is called *anti-symmetric* if $A^\top = -A$, and *symmetric* if $A^\top = A$. Let S be the subspace of $\mathbb{R}^{n\times n}$ of symmetric matrices. Let L be the subset $\mathbb{R}^{n\times n}$ of anti-symmetric matrices.

(a) Show that L forms a subspace of $\mathbb{R}^{n\times n}$.

For the rest of this exercise, set $n = 2$.

(b) Determine a basis of L. What is the dimension of L?

(c) Determine a basis of S. What is the dimension of S?

(d) Show that every matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ can be written as $A = A_1 + A_2$, with A_1 anti-symmetric and A_2 symmetric.

4. (Nederlands) [**4+2+3+4+4+3 Punten.**]

Voor een gegeven positief geheel getal n is P_n de vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner dan n, met reële coefficienten.

(a) Geef een basis van P_n.

(b) Bepaal de dimensie van P_n.

Definieer de afbeelding $T : P_4 \to P_4$ door

$$T(p(x)) := p(x) - xp'(x)\,.$$

(c) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

(d) Bepaal de kern $\ker(T)$ van T.

(e) Bepaal de matrix A die T representeert ten opzichte van de geordende basis $E := \{1, x, x^2, x^3\}$.

(f) Bepaal de rang van A.

4. (English) [**4+2+3+4+4+3 Points.**]

For a given positive integer n, P_n is the vector space of polynomials of degree less than n, with real coefficients.

(a) Determine a basis of P_n.

(b) Determine the dimension of P_n.

Define the mapping $T : P_4 \to P_4$ as

$$T(p(x)) := p(x) - xp'(x)\,.$$

(c) Show that T is a linear mapping.

(d) Determine the kernal $\ker(T)$ van T.

(e) Determine the matrix A which represents T with respect to the ordered basis $E := \{1, x, x^2, x^3\}$.

(f) Determine the rank of A.

5. (Nederlands) [4+4+4 **Punten.**]

Voor elk tweetal vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$ noteren we door $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ het gebruikelijke skalaire product. Stel dat $\mathcal{W}$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$. We definieren het *orthogonale complement* $\mathcal{W}^\perp$ *van* $\mathcal{W}$ door:

$$\mathcal{W}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0 \text{ voor alle } \mathbf{y} \in \mathcal{W}\}.$$

(a) Bewijs dat $\mathcal{W}^\perp$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$.

(b) Bewijs dat $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

(c) Laat A een matrix zijn zodat $\mathcal{W} = R(A)$ waarbij $R(A)$ de range van A is. Bewijs dat $\mathcal{W}^\perp = N(A^T)$ waarbij $N(A^T)$ de nulruimte van A^T is.

5. (English) [4+4+4 **Points.**]

For every two vectors $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$, we denote by $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ the usual scalar product. Let $\mathcal{W}$ be a subspace of $\mathbb{R}^n$. We define the *orthogonale complement* $\mathcal{W}^\perp$ *of* $\mathcal{W}$ as

$$\mathcal{W}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0 \text{ voor alle } \mathbf{y} \in \mathcal{W}\}.$$

(a) Prove that $\mathcal{W}^\perp$ is a subspace of $\mathbb{R}^n$.

(b) Prove that $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

(c) Let A be a matrix such that $\mathcal{W} = R(A)$ where $R(A)$ is the range of A. Prove that $\mathcal{W}^\perp = N(A^T)$ where $N(A^T)$ is the null space of A^T.

6. (Nederlands) [4+3+6+3 **Punten.**] Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal het karakteristieke polynoom van A.

(b) Bepaal de eigenwaarden van A.

(c) Bepaal de eigenvectoren van A

(d) Ga na of A diagonaliseerbaar is. Bepaal in dat geval een matrix T zodat $T^{-1}AT$ diagonaal is.

6. (English) [4+3+6+3 **Points.**] Let the matrix A be defined as

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine the characteristic polynomial of A.

(b) Determine the eigenvalues of A.

(c) Determine the eigenvectors of A

(d) Check whether A can be diagonalized. Determine in this case a matrix T such that $T^{-1}AT$ is diagonal.